الأولى ع ت	النهايات و الإتصال ملخص الدرس	ح.بوعيون

I) النهايات

1) الأشكال الغير محددة:

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty\times 0$	$+\infty-\infty$

2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$$+\infty+a=+\infty$$
$$-\infty+a=-\infty$$
$$+\infty+\infty=+\infty \qquad (a\in\mathbb{R})$$
$$-\infty-\infty=-\infty$$
$+\infty-\infty$ ش غ محدد

$$a\times\infty=\infty \quad (a\neq 0)$$
$$\infty\times\infty=\infty$$
$0\times\infty$ ش غ محدد

$$\frac{\infty}{a}=\infty \qquad \frac{a}{\infty}=0 \qquad \frac{a\neq 0}{0}=\infty$$
$\frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$ ش غ محدد

$$(-\infty)^n=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est paire}\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire}\end{cases}$$
$$\sqrt{+\infty}=+\infty$$

3) خاصيات

a) إذا كانت للدالتين f و g نهاية منتهية في x_0 فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و αf تقبل نهاية منتهية في x_0
و $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x).g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x).\lim_{x\to x_0}g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x))=\alpha.\lim_{x\to x_0}f(x)$$

وإذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))\neq 0$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

b) نهاية دالة حدودية في ∞ هي نهاية الحد الأكبر درجة .

c) نهاية دالة جذرية في ∞ هي نهاية خارج الحدين الأكبر درجة

4) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

a) $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ التعميل.

b) $\lim\limits_{\infty}(f(x)+g(x))=+\infty-\infty$

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ⟵ المرافق.

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ⟵ التعميل.

c) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0}$ $(a\neq 0)$ ⟵ المرافق.

d) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0}$ $(a\neq 0)$ ⟵ التفكيك ثم ربما المرافق.

e) ملاحظة: $\sqrt{x^2}=|x|$ ؛ $\begin{cases}x=\sqrt{x^2}\,;x\geq 0\\ x=-\sqrt{x^2}\,;x\leq 0\end{cases}$

5) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$$

6) النهايات و الترتيب.

a) إذا كان $\begin{cases}|f(x)-l|\leq g(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}g(x)=0 \text{ و}\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=l$

b) إذا كان $\begin{cases}f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}f(x)=+\infty \text{ و}\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}g(x)=+\infty$

c) إذا كان $\begin{cases}f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}g(x)=-\infty \text{ و}\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=-\infty$

d) إذا كانت $\begin{cases}g(x)\leq f(x)\leq h(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}g(x)=\lim\limits_{x_0}h(x)=l\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=l$

II) الإتصال

1) تعريف

لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0}f(x)$

*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x_0}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x_0^+}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x_0^-}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على يمين و على يسار x_0 .

2) خاصيات

a) كل دالة حدودية متصلة على IR .

b) كل دالة جذرية متصلة على حيز تعريفها .

c) *) الدوال $x\to\sin x$ $\;x\to\cos x$ متصلة على IR .

*) الدال $x\to\tan x$ متصلة على حيز تعريفها .

d) إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و αf متصلة على I .

وإذا كانت g لاتنعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ متصلة على I .

ملاحظة

إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مجموع وجداء دوال متصلة في غالب الأحيان.

3) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرففي x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0}f(x)$ إذا وجدنا $\lim\limits_{x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا g بالاتصال في x_0 معرف بما يلي: $\begin{cases}g(x)=f(x)\ ,x\neq x_0\\ g(x_0)=l\end{cases}$